6 次可移群に対する Noether の問題

— 最近の進展とその背景 (III)

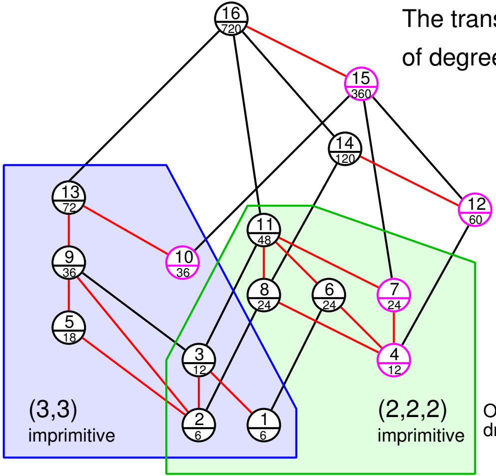
橋本喜一朗 (早稲田大学)
角皆 宏 (上智大学)

研究集会「Galois 理論とその周辺・徳島 2008」
2008-09-12

“複比型 Noether 問題”
(Cross-Ratio Noether Problem = CRNP)

- 背景 — $\mathcal{M}_{0,6}, \mathcal{M}_2, \mathcal{A}_2$
- 可解な 6 次可移群 $(12$ 種) の場合
  - $\star$ **6T13** — $(3,3)$-非原始的部分群
  - $\star$ **6T11** — $(2,2,2)$-非原始的部分群
- 複比型 Noether 問題と置換 Noether 問題との関係 (相対的有理性問題)

The transitive groups of degree 6



Originally drawn by Hashimoto

§0: 複比型 Noether 問題

一般 Noether 問題 (GNP) の一変種

以下、ずっと $n \geq 5$

$\mathcal{M}_{0,n}$ **: 順番あり** n **標点付き射影直線の moduli**

$$= \mathrm{PGL}(2) \Big\backslash \Big((\mathbf{P}^1)^n \smallsetminus \Delta \Big)$$

$$= (\mathbf{P}^1 \smallsetminus \{0, 1, \infty\})^{n-3} \smallsetminus \Delta$$

(Δ **: 弱対角集合)**

$\mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathcal{M}_{0,n}$**: 点の置換で作用**

$L_n = \boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_n)$: $(\mathbf{P}^1)^n$ の関数体

$\mathrm{PGL}(2, \boldsymbol{Q}) \curvearrowright L_n$: 一次分数変換の対角的作用

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x_i := \frac{ax_i + b}{cx_i + d}$$

$K_n = L_n^{\mathrm{PGL}(2,\boldsymbol{Q})}$: $\mathcal{M}_{0,n}$ の関数体

$\mathfrak{S}_n \curvearrowright L_n, K_n$: 変数の置換

(置換)Noether 問題 ((Perm)NP)

$\mathfrak{S}_n$ の部分群 G に対し、
固定体 L_n^G は有理的か？

- 肯定的な例も否定的な例もある
  非自明な問題
- 肯定的なら
  n 助変数の生成的 G-多項式を得る
- $G = \mathfrak{S}_n$ は容易 ($L_n^{\mathfrak{S}_n}$ は対称式の体)
- $G \supset H$ でも、互いに含意無し

$K_n = L_n^{\mathrm{PGL}(2,\boldsymbol{Q})}$: $\mathcal{M}_{0,n}$ の関数体

K_n は**複比**で生成される

$$K_n = \boldsymbol{Q}\left(\frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \Big/ \frac{x_i - x_l}{x_j - x_l} \,\middle|\, \begin{array}{c} i, j, k, l \\ \text{相異なる} \end{array} \right)$$

適切な $(n-3)$ 個の複比で有理的に生成

($(n-3)$ 変数有理関数体)

複比型 Noether 問題 (CRNP)

$\mathfrak{S}_n$ の部分群 G に対し、
複比の体の固定体 K_n^G は有理的か？

Kemper-Mattig の定理 (2000) により

CRNP が肯定的なら

$(n-3)$ 助変数の生成的 G-多項式を得る

複比型 Noether 問題 (CRNP)

$\mathfrak{S}_n$ の部分群 G に対し、
複比の体の固定体 K_n^G は有理的か？

Kemper-Mattig の定理 (2000) により

CRNP が肯定的なら

$(n-3)$ 助変数の生成的 G-多項式を得る

§1: 幾何学的背景

$\mathcal{M}_{0,n}$：順番あり n 標点付き射影直線の moduli

$\mathcal{M}_{0,[n]}$：順番なし n 標点付き射影直線の moduli

$$\mathcal{M}_{0,n} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{0,n}/\mathfrak{S}_n = \mathcal{M}_{0,[n]}$$

$n = 6$ のとき

$[\{P_1, \ldots, P_6\}] \in \mathcal{M}_{0,[6]}$ に対し、

$\exists!\ C \twoheadrightarrow \mathbf{P}^1$:
 $\{P_1, \ldots, P_6\}$ で分岐する種数 2 の超楕円曲線

$\mathcal{M}_2$: 種数 2 の (超楕円) 曲線の moduli

$\mathcal{A}_2$: 2 次元の主偏極 abel 多様体の moduli

$[C] \in \mathcal{M}_2$ が well-defined に定まる

$$\mathcal{M}_{0,[6]} \simeq \mathcal{M}_2 \simeq \mathcal{A}_2$$

$n=6$ のとき

$[\{P_1,\dots,P_6\}]\in\mathcal{M}_{0,[6]}$ に対し、

$\exists !\ C\twoheadrightarrow \mathbf{P}^1$:
$\{P_1,\dots,P_6\}$ で分岐する種数 2 の超楕円曲線

$\mathcal{M}_2$: 種数 2 の (超楕円) 曲線の moduli

$\mathcal{A}_2$: 2 次元の主偏極 abel 多様体の moduli

$[C]\in\mathcal{M}_2$ が well-defined に定まる

$$\mathcal{M}_{0,[6]}\simeq\mathcal{M}_2\simeq\mathcal{A}_2$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{S}_6 & = & \mathfrak{S}_6 & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{GSp}(4, \boldsymbol{F}_2) \\
\curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright \\
\mathcal{M}_{0,6} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_2[2] & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}_2[2] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{M}_{0,[6]} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_2 & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}_2
\end{array}$$

$$\boldsymbol{Q}(\mathcal{M}_{0,6})^{\mathfrak{S}_6} = \boldsymbol{Q}(\mathcal{M}_{0,[6]}) = \boldsymbol{Q}(\mathcal{A}_2)$$

: 2 次の Siegel modular 関数体

Fact: $Q(\mathcal{A}_2)$ は 3 変数有理関数体

$\longrightarrow Q(\mathcal{M}_{0,6})^{\mathfrak{S}_6}$: Q 上有理的 (純超越的)
(CRNP for $\mathfrak{S}_6$ OK !!)

問: $\mathfrak{S}_6$ の他の部分群ではどうか ?

$\longrightarrow$ 従来あまり扱われていなかった形の
level 2 の合同部分群に対する
Siegel modular 関数体の決定

Fact: $Q(\mathcal{A}_2)$ は 3 変数有理関数体

$\longrightarrow Q(\mathcal{M}_{0,6})^{\mathfrak{S}_6}$: Q 上有理的 (純超越的)
(CRNP for $\mathfrak{S}_6$ OK !!)

問: $\mathfrak{S}_6$ の他の部分群ではどうか？

$\longrightarrow$ 従来あまり扱われていなかった形の
level 2 の合同部分群に対する
Siegel modular 関数体の決定

§2: 6 次可移群の表

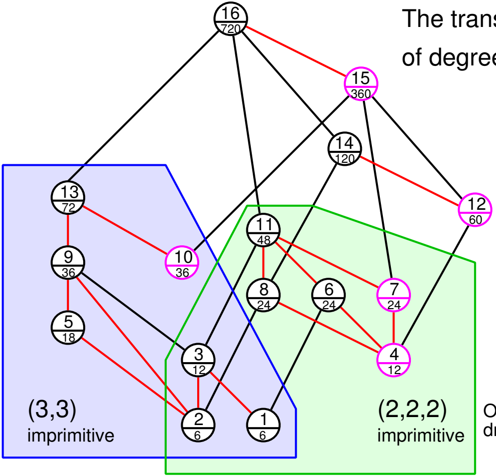
Gregory Butler and John McKay,
"The transitive groups of degree up to eleven",
Comm. Algebra 11 (1983), no. 8, 863–911.

11 次以下の可移群の表

(現在は続編が出ている)

特に、6 次可移群は 16 種 (共役類)

The transitive groups of degree 6



Originally drawn by Hashimoto

非原始型	$G \not\subset \mathfrak{A}_6$			$G \subset \mathfrak{A}_6$		
$(3,3)$ かつ $(2,2,2)$	**1**	6	C_6			
	2	6	$\mathfrak{S}_3$			
	3	12	D_6			
$(3,3)$	**5**	18	$C_2 \ltimes C_3^2$			
	9	36	$V_4 \ltimes C_3^2$			
	13	72	$D_4 \ltimes C_3^2$	**10**	36	$C_4 \ltimes C_3^2$
$(2,2,2)$	**6**	24	$C_3 \ltimes C_2^3$			
	8	24	$\mathfrak{S}_3 \ltimes V_4$	**4**	12	$C_3 \ltimes V_4$
	11	48	$\mathfrak{S}_3 \ltimes C_2^3$	**7**	24	$\mathfrak{S}_3 \ltimes V_4$
原始的	**14**	120	$\mathfrak{S}_5$	**12**	60	$\mathfrak{A}_5$
(非可解)	**16**	720	$\mathfrak{S}_6$	**15**	360	$\mathfrak{A}_6$

非原始型	$G \not\subset \mathfrak{A}_6$			$G \subset \mathfrak{A}_6$		
$(3,3)$ かつ $(2,2,2)$	**1**	6	C_6			
	2	6	$\mathfrak{S}_3$			
	3	12	D_6			
$(3,3)$	**5**	18	$C_2 \ltimes C_3^2$			
	9	36	$V_4 \ltimes C_3^2$			
	13	72	$D_4 \ltimes C_3^2$	**10**	36	$C_4 \ltimes C_3^2$
$(2,2,2)$	**6**	24	$C_3 \ltimes C_2^3$			
	8	24	$\mathfrak{S}_3 \ltimes V_4$	**4**	12	$C_3 \ltimes V_4$
	11	48	$\mathfrak{S}_3 \ltimes C_2^3$	**7**	24	$\mathfrak{S}_3 \ltimes V_4$
原始的 (非可解)	**14**	120	$\mathfrak{S}_5$	**12**	60	$\mathfrak{A}_5$
	16	720	$\mathfrak{S}_6$	**15**	360	$\mathfrak{A}_6$

§3: $Q(\mathcal{M}_{0,n})$ への $\mathfrak{S}_n$ の作用の計算

$\sigma \in \mathfrak{S}_n, P = [x_1, \dots, x_n] \in \mathcal{M}_{0,n}$ に対し

$$\sigma(P) := [x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}]$$

$\sigma \in \mathfrak{S}_n, f \in \boldsymbol{Q}(\mathcal{M}_{0,n})$ に対し

$$\sigma(f) := f \circ \sigma^{-1}$$

これで共に左作用になっている

$$K := K_6 = \boldsymbol{Q}(a, b, c)$$

$$a = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_5} \Big/ \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_5}$$

$$b = \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_1} \Big/ \frac{x_5 - x_3}{x_5 - x_1}$$

$$c = \frac{x_6 - x_5}{x_6 - x_3} \Big/ \frac{x_1 - x_5}{x_1 - x_3}$$

$\longleftrightarrow$ **正規化** $\left[{\color{blue}0}, a, {\color{blue}1}, \frac{1}{1-b}, {\color{blue}\infty}, \frac{c-1}{c}\right]$ **に対応**

例: $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \in \mathfrak{S}_6$

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = \left[0, a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}\right]$$

$$\xmapsto{\alpha^{-1}}$$

$$[x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1] = \left[a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}, 0\right]$$

$$= \left[0, \boxed{\ ?\ }, 1, \boxed{\ ?\ }, \infty, \boxed{\ ?\ }\right]$$

例: $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \in \mathfrak{S}_6$

$$\left[0, a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}\right]$$

$$\xmapsto{\alpha^{-1}} \left[a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}, 0\right]$$

$$= \left[0, \boxed{\ ?\ }, 1, \boxed{\ ?\ }, \infty, \boxed{\ ?\ }\right]$$

$\left(\xi \mapsto \dfrac{\xi - a}{\xi - \frac{c-1}{c}} \Big/ \dfrac{\frac{1}{1-b} - a}{\frac{1}{1-b} - \frac{c-1}{c}}\right.$ **で再正規化)**

例: $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \in \mathfrak{S}_6$

$$\left[0, a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}\right]$$

$$\xmapsto{\alpha^{-1}} \left[a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}, 0\right]$$

$$= \left[0, \boxed{\textbf{?}}, 1, \boxed{\textbf{?}}, \infty, \boxed{\textbf{?}}\right]$$

($\xi \mapsto \dfrac{\xi - a}{\xi - \frac{c-1}{c}} \Big/ \dfrac{\frac{1}{1-b} - a}{\frac{1}{1-b} - \frac{c-1}{c}}$ **で再正規化)**

例: $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \in \mathfrak{S}_6$

$$\left[0, a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}\right]$$
$$\xmapsto{\alpha^{-1}} \left[a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}, 0\right]$$
$$= \left[0, \boxed{\ \textbf{?}\ }, 1, \boxed{\ \textbf{?}\ }, \infty, \boxed{\ \textbf{?}\ }\right]$$

($\xi \mapsto \dfrac{\xi - a}{\xi - \frac{c-1}{c}} \Bigg/ \dfrac{\frac{1}{1-b} - a}{\frac{1}{1-b} - \frac{c-1}{c}}$ **で再正規化)**

例: $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \in \mathfrak{S}_6$

$$
\begin{aligned}
&\left[0, a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}\right] \\
\xmapsto{\alpha^{-1}} &\left[a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}, 0\right] \\
= &\left[0, \boxed{\ \textbf{?}\ }, 1, \boxed{\ \textbf{?}\ }, \infty, \boxed{\ \textbf{?}\ }\right]
\end{aligned}
$$

($\xi \mapsto \dfrac{\xi - a}{\xi - \frac{c-1}{c}} \bigg/ \dfrac{\frac{1}{1-b} - a}{\frac{1}{1-b} - \frac{c-1}{c}}$ **で再正規化)**

例: $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \in \mathfrak{S}_6$

$$\left[a, 1, \frac{1}{1-b}, \infty, \frac{c-1}{c}, 0\right] \xmapsto{\alpha^{-1}}$$

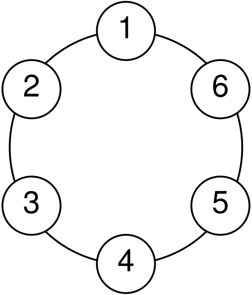
$$\left[0, \tfrac{(1-a)(1-b+bc)}{1-a+ab}, 1, \tfrac{1-b+bc}{c(1-a+ab)}, \infty, -\tfrac{a(1-b+bc)}{(1-c)(1-a+ab)}\right]$$

$$\alpha : \begin{cases} a \longmapsto \dfrac{(1-a)(1-b+bc)}{1-a+ab} \\ b \longmapsto \dfrac{(1-b)(1-c+ca)}{1-b+bc} \\ c \longmapsto \dfrac{(1-c)(1-a+ab)}{1-c+ca} \end{cases}$$

§4: **6T3** — $(3,3)$-$(2,2,2)$-非原始的部分群

6T3 $= \langle \alpha, \beta \rangle \simeq D_6$: **数珠順列の固定群**

$\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), \beta = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$



$Z(\mathbf{6T3}) = \langle \theta \rangle \simeq C_2$

$\theta := \alpha^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$

$\mathbf{6T3}/Z(\mathbf{6T3}) \simeq \mathfrak{S}_3$

$$\alpha : \begin{cases} a \mapsto \dfrac{(1-a)(1-b+bc)}{1-a+ab} \\ b \mapsto \dfrac{(1-b)(1-c+ca)}{1-b+bc} \\ c \mapsto \dfrac{(1-c)(1-a+ab)}{1-c+ca}, \end{cases}$$

$$\beta : \begin{cases} a \mapsto \dfrac{b(1-c+ca)}{1-a+ab} \\ b \mapsto \dfrac{a(1-b+bc)}{1-c+ca} \\ c \mapsto \dfrac{c(1-a+ab)}{1-b+bc}. \end{cases}$$

$$\alpha^2 : \begin{cases} a \mapsto b \\ b \mapsto c \\ c \mapsto a, \end{cases} \qquad \alpha\beta : \begin{cases} a \mapsto 1-b \\ b \mapsto 1-a \\ c \mapsto 1-c. \end{cases}$$

$$\theta = \alpha^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6) :$$

$$\begin{cases} a \longmapsto \dfrac{(1-b)(1-c+ca)}{1-b+bc} \\ b \longmapsto \dfrac{(1-c)(1-a+ab)}{1-c+ca} \\ c \longmapsto \dfrac{(1-a)(1-b+bc)}{1-a+ab} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x := a(1-b) \\ y := b(1-c) \\ z := c(1-a) \\ p := abc \end{cases}$$

とおく

(x, y, z は、正規化

$[0, x, *, 1, \infty, *], [\infty, *, 0, y, *, 1], [*, 1, \infty, *, 0, z]$

で定まる複比)

$$p^2 + (x + y + z - 1)p + xyz = 0$$

$$\alpha : \begin{cases} x \longmapsto z \\ y \longmapsto x \\ z \longmapsto y \\ p \longmapsto 1 - (x + y + z) - p, \end{cases} \qquad \beta : \begin{cases} x \longmapsto z \\ y \longmapsto y \\ z \longmapsto x \\ p \longmapsto p \end{cases}$$

$$\longrightarrow K^{\langle\theta\rangle} = \boldsymbol{Q}(x, y, z), K = K^{\langle\theta\rangle}(p)$$

$$\longrightarrow K^{\mathbf{6T3}} = \boldsymbol{Q}(s, t, u)$$
$$\boldsymbol{(}s := x + y + z, t := xy + yz + zx, u := xyz\boldsymbol{)}$$

$$\alpha : \begin{cases} x \longmapsto z \\ y \longmapsto x \\ z \longmapsto y \\ p \longmapsto 1 - (x+y+z) - p, \end{cases} \qquad \beta : \begin{cases} x \longmapsto z \\ y \longmapsto y \\ z \longmapsto x \\ p \longmapsto p \end{cases}$$

$$\longrightarrow K^{\langle\theta\rangle} = \boldsymbol{Q}(x, y, z), K = K^{\langle\theta\rangle}(p)$$

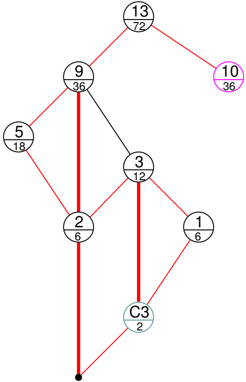
$$\longrightarrow K^{\mathbf{6T3}} = \boldsymbol{Q}(s, t, u)$$

$$\big(s := x + y + z, t := xy + yz + zx, u := xyz\big)$$

§4: 6T13 — $(3,3)$-非原始的部分群

6T13：
分割
$$\{1,\ldots,6\} = \{1,3,5\} \sqcup \{2,4,6\}$$
の安定化群

$(3,3)$-**非原始的**
極大部分群



6T13 については、前回の集会

「Galois 理論とその周辺 (山形 2007)」

でも話したので、今回は詳細略。

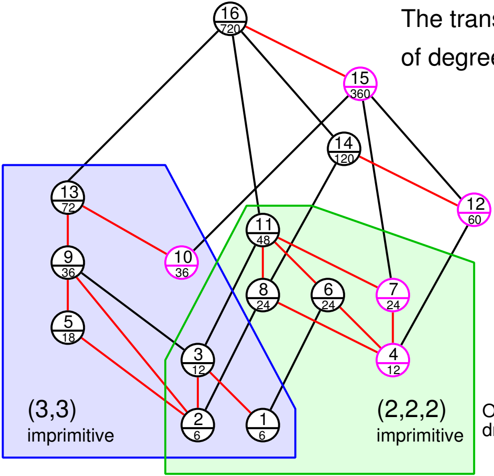
6T13 の部分群については、

$$\mathbf{6T10} = \mathbf{6T13} \cap \mathfrak{A}_6$$ **以外の**

$6Tn$ **(**$n = 1, 2, 3, 5, 9, 13$**) については**
全て肯定的な結果を得ている。

(6T10 については未解決)

The transitive groups of degree 6

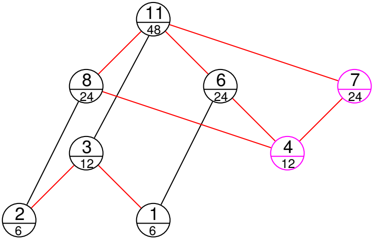


Originally drawn by Hashimoto

$\S$5: 6T11 — $(2,2,2)$-非原始的部分群

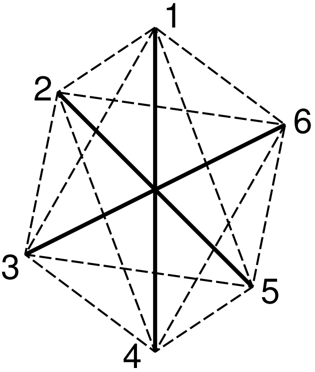
6T11: 分割 $\{1,\ldots,6\}=\{1,4\}\sqcup\{2,5\}\sqcup\{3,6\}$ **の安定化群**

$(2,2,2)$-**非原始的極大部分群**

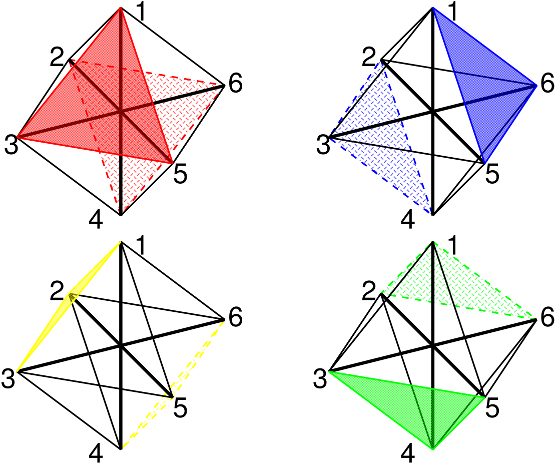


$$\textbf{6T11} \simeq \mathfrak{S}_4 \times C_2$$
$$\simeq \mathfrak{S}_3 \ltimes (C_2)^3$$

鏡像を許した
正八面体の自己同型群



octahedron


1
2
6
3
5
4
1
2
6
3
5
4
1
2
6
3
5
4
1
2
6
3
5
4

6T11：鏡像を許した正八面体の自己同型群

6T8：鏡像を許さない正八面体の自己同型群
(正八面体群の標準的な頂点の置換)

6T7 $=$ **6T11** $\cap \mathfrak{A}_6$
：鏡像は許すが頂点は偶置換のみ

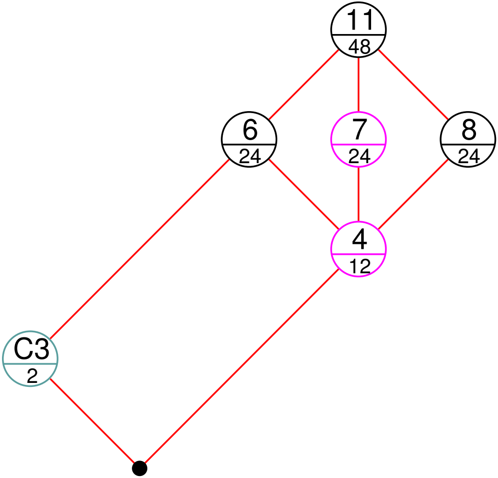
6T6：鏡像は許すが
3 **軸** $\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}$ **の偶置換のみ**

6T4 $=$ **6T6** $\cap \mathfrak{A}_6 =$ **6T6** $\cap \mathfrak{A}_6$
：鏡像は許さず頂点・3 **軸とも偶置換のみ**

このような部分群たちを表示するとき、
生成元の個数を減らしても余り得しない

$\longrightarrow$ 点への作用 (“0 次元の幾何”) を見るべし

幾何的対称性を鑑みて、
作用の見易い正規化により、
複比の体の生成元をうまく採るべし


11
48
6
24
7
24
8
24
4
12
C3
2

$Z(\textbf{6T11}) = Z(\textbf{6T3}) = \langle\theta\rangle \simeq C_2$

$\theta = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$: **原点対称移動**

$\textbf{6T11}/\langle\theta\rangle \simeq \mathfrak{S}_4$ ： **正八面体群**

$\textbf{6T11}/\langle\theta\rangle \curvearrowright K^{\langle\theta\rangle} = \boldsymbol{Q}(x, y, z)$

この作用が綺麗に書ける
(太田雄介氏と共同・修士論文 (上智・2008))

$$\begin{cases} x' := 2x - 1 \\ y' := 2y - 1 \\ z' := 2z - 1 \end{cases}$$

とおく

(x', y', z' **は、正規化**

$$[-1, x', *, 1, \infty, *]$$

$$[\infty, *, -1, y', *, 1]$$

$$[*, 1, \infty, *, -1, z']$$

で定まる)

定理:

6T11$/\langle\theta\rangle \simeq \mathfrak{S}_4$ **の**

$K^{\langle\theta\rangle} = \boldsymbol{Q}(x', y', z')$ **への作用は、**

3 **次元空間内の正八面体への**

標準的な線型作用と一致する。

実際、

$\tau_1 := (1\ 4)(2\ 5), \tau_2 := (1\ 4)(3\ 6)$ **とおくと、**

$$\textbf{6T11}/\langle\theta\rangle \simeq \textbf{6T3}/\langle\theta\rangle \ltimes \langle\tau_1, \tau_2\rangle$$
$$\simeq \mathfrak{S}_3 \ltimes V_4$$

$$\alpha : \begin{cases} x' \mapsto z' \\ y' \mapsto x' \\ z' \mapsto y', \end{cases} \qquad \beta : \begin{cases} x' \mapsto y' \\ y' \mapsto x' \\ z' \mapsto z'. \end{cases}$$

$$\tau_1 : \begin{cases} x' \mapsto x' \\ y' \mapsto -y' \\ z' \mapsto -z', \end{cases} \qquad \tau_2 : \begin{cases} x' \mapsto -x' \\ y' \mapsto y' \\ z' \mapsto -z'. \end{cases}$$

これより直ちに、

$$K^{\mathbf{6T11}} = \boldsymbol{Q}(s_{11}, t_{11}, u_{11})$$

$$\begin{cases} s_{11} := {x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 \\ t_{11} := {x'}^2{y'}^2 + {y'}^2{z'}^2 + {z'}^2{x'}^2 \\ u_{11} := x'y'z' \end{cases}$$

$\longrightarrow$ **6T6, 6T7, 6T8, 6T4 についても**

肯定的に解決

(若干計算が重いものもあるが)

現象面では作用が綺麗になる理由は良く判る
(生成元の取り方から、見てすぐに判る)

が、

- **内在的・幾何的理由付けは？**
  ($\mathcal{M}_{0,6} \simeq \mathcal{A}_2[2]$ などを通した解釈は？)
- **何故 6T8 でなく**
  $\mathbf{6T11}/Z(\mathbf{6T11})$ が綺麗に書けるのか？
- **6T8 の作用は綺麗に書けないのか？**

§6: CRNP と PermNP との関係 (相対的有理性)

$L_n = \boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_n)$: n 変数有理関数体

$\mathrm{PGL}(2, \boldsymbol{Q}) \curvearrowright L_n$: 一次分数変換の対角的作用

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x_i := \frac{ax_i + b}{cx_i + d}$$

$K_n = L_n^{\mathrm{PGL}(2,\boldsymbol{Q})}$: $\mathcal{M}_{0,n}$ の関数体

$\mathfrak{S}_n \curvearrowright L_n, K_n$: 変数の置換

L_n/K_n : 相対的 3 次元の純超越 (有理的) 拡大

問: $\mathfrak{S}_n$ の部分群 G に対し、
L_n^G/K_n^G は相対的に有理的か？

もしそうなら、
CRNP OK $\Longrightarrow$ PermNP OK

注: $G \supset H$ のとき、G で OK $\Longrightarrow$ H でも OK
(同じ生成元でよい)
$\longrightarrow$ $G = \mathfrak{S}_n$ で成り立てばいつでも OK

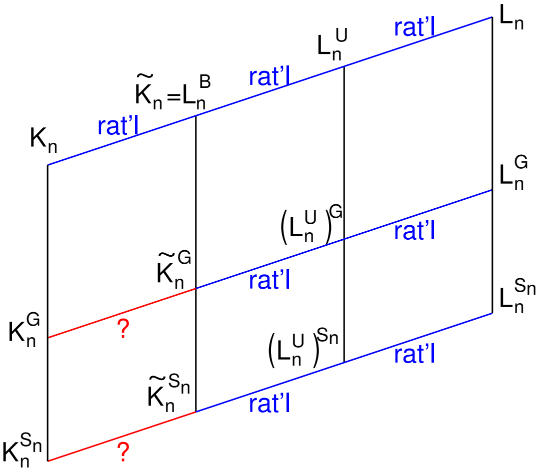
L_n/K_n：相対的 3 次元の純超越 (有理的) 拡大

問題を 1 次元づつ 3 分割

$$\mathrm{PGL}(2,\boldsymbol{Q}) \supset B := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$
$$\supset U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \supset \{1\}$$

固定体の列:

$$L_n \supset L_n^U \supset L_n^B =: \widetilde{K}_n \supset L_n^{\mathrm{PGL}(2,\boldsymbol{Q})} = K_n$$


L_n
rat'l
L_n^U
rat'l
$\widetilde{K}_n = L_n^B$
rat'l
K_n
L_n^G
$(L_n^U)^G$
rat'l
$\widetilde{K}_n^G$
rat'l
K_n^G
?
$L_n^{S_n}$
$(L_n^U)^{S_n}$
rat'l
$\widetilde{K}_n^{S_n}$
rat'l
$K_n^{S_n}$
?

$$\widetilde{K}_n = \boldsymbol{Q}\left(\frac{x_i - x_1}{x_i - x_2}\middle| i = 3, \ldots, n\right)$$ **: "差の比の体"**

$$L_n^U = \boldsymbol{Q}\left(x_i - x_1 | i = 2, \ldots, n\right)$$ **: "差の体"**

$$\widetilde{K}_n = K_n\left(\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\right)$$

$$L_n^U = \widetilde{K}_n(x_2 - x_1)$$

$$L_n = L_n^U(x_1)$$

: それぞれ有理的

問: この各段階の有理性が
置換群による固定体に降下するか？

Fact: 上 2 段については有理性の降下は、
$G=\mathfrak{S}_n$ に対し (従って常に) 成立

問: $\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}$ は $K_n^{\mathfrak{S}_n}$ 上有理的か ?

定理 (RIMS2004 の改良):

(1) n**: 奇数のとき、**
$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}/K_n^{\mathfrak{S}_n}$ **: 有理的**
(従って $\forall G\subset\mathfrak{S}_n$ でも OK)

(2) n**: 偶数のとき、**
$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}/K_n^{\mathfrak{S}_n}$ **: 有理的でない**

Fact: 上 2 段については有理性の降下は、
$G=\mathfrak{S}_n$ に対し (従って常に) 成立

問: $\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}$ は $K_n^{\mathfrak{S}_n}$ 上有理的か ?

定理 (RIMS2004 の改良):

(1) n : 奇のとき、
$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}/K_n^{\mathfrak{S}_n}$: 有理的
(従って $\forall G\subset\mathfrak{S}_n$ でも OK)

(2) n : 偶のとき、
$\widetilde{K}_n^{\mathfrak{S}_n}/K_n^{\mathfrak{S}_n}$: 有理的でない

補題:

- $G \supset H$ **のとき、**

  G **で OK** $\Longrightarrow$ H **でも OK**
- $G \supset H$ **で** $2 \nmid (G:H)$ **のとき、**

  H **で OK** $\Longrightarrow$ G **でも OK**

命題:

(1) n **: 奇のとき、**$\mathfrak{S}_n$ **の** 2**-Sylow 群** T **に対し、**

$\widetilde{K}_n^T / K_n^T$ **: 有理的**

(2) n **: 偶のとき、**$H = \langle \theta \rangle$ **に対し、**

$\widetilde{K}_n^H / K_n^H$ **: 有理的でない**

(ここに $\theta = (1\ 2) \cdots (n-1\ n)$**)**

というわけで、$n = 6$ のときは、

$\widetilde{K}_6^{\mathfrak{S}_6}/K_6^{\mathfrak{S}_6}$ は有理的でない
(非有理的円錐曲線) のだが、

では、$\mathfrak{S}_6$ 以外の
($\theta = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ を含まない)
部分群 G に対してはどうか ?

儚い**期待: $\mathfrak{A}_6$ なら OK ?**

というわけで、$n = 6$ のときは、

$\widetilde{K}_6^{\mathfrak{S}_6}/K_6^{\mathfrak{S}_6}$ **は有理的でない**

(非有理的円錐曲線) のだが、

では、$\mathfrak{S}_6$ 以外の

($\theta = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ を含まない)

部分群 G に対してはどうか ?

儚い期待: $\mathfrak{A}_6$ なら OK ?

定理:
(渡邉雅則氏と共同・修士論文 (上智・2008))

$n = 6$ **のとき、**

$\mathfrak{S}_6$ **の全ての可移部分群** G **に対し、**

$\widetilde{K}_6^G / K_6^G$ **: 有理的でない**

補題:

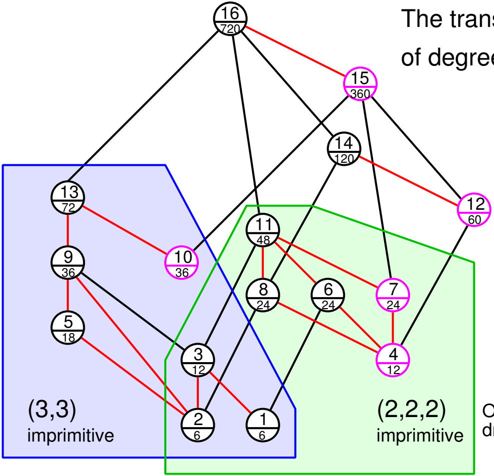
$\mathfrak{S}_6$ **の全ての可移部分群** G **は、**
次のいづれかと共役な部分群を含む。

$$T_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \rangle,$$
$$T_2 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 2)(5\ 6) \rangle,$$
$$T_3 = \langle (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) \rangle.$$

実際、

- $G \not\subset \mathfrak{A}_6 \Longrightarrow G \supset T_1$
- $G \subset \mathfrak{A}_6, G \neq$ **6T10** $\Longrightarrow G \supset T_2$
- $G =$ **6T10** $\Longrightarrow G \supset T_3$

The transitive groups of degree 6



Originally drawn by Hashimoto

命題:

$\mathfrak{S}_6$ **の次の** 2-**部分群** T_1, T_2, T_3 **に対し、**

$\widetilde{K}_6^T / K_6^T$ **：有理的でない。**

$$T_1 = \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \rangle,$$

$$T_2 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 2)(5\ 6) \rangle,$$

$$T_3 = \langle (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) \rangle.$$

補題:

$\widetilde{L} = L(X)$**:** 1 **変数有理関数体** $/L$**,** $\mathrm{ch} \neq 2$

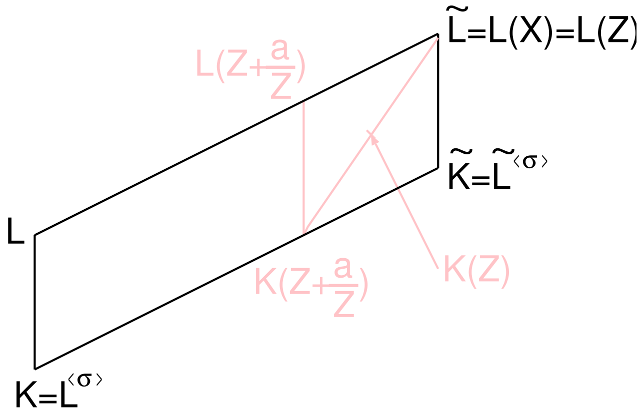
$\sigma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{L}), \quad \sigma^2 = \mathrm{id}$

$\sigma(L) = L, \quad \sigma|_L \neq \mathrm{id}$

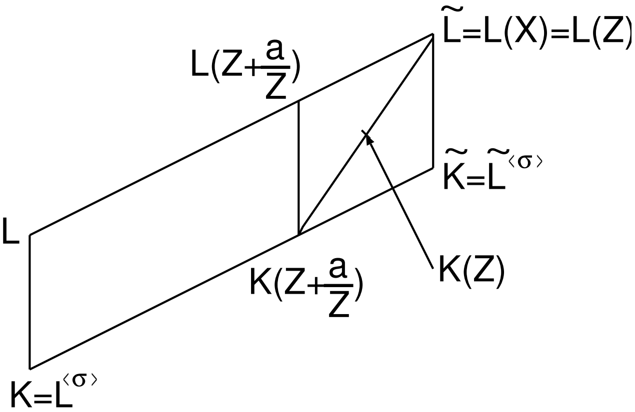
$\widetilde{K} := \widetilde{L}^{\langle\sigma\rangle}, \quad K := L^{\langle\sigma\rangle}$

$\Longrightarrow$

$$\exists Z \in \widetilde{L} \text{ **s.t.** } \widetilde{L} = L(Z),\ Z\sigma(Z) \in K$$



$\widetilde{L}=L(X)=L(Z)$
$L(Z+\frac{a}{Z})$
$\widetilde{K}=\widetilde{L}^{\langle\sigma\rangle}$
L
$K(Z+\frac{a}{Z})$
$K(Z)$
$K=L^{\langle\sigma\rangle}$



$\widetilde{L}=L(X)=L(Z)$
$L(Z+\frac{a}{Z})$
$\widetilde{K}=\widetilde{L}^{\langle\sigma\rangle}$
L
$K(Z)$
$K(Z+\frac{a}{Z})$
$K=L^{\langle\sigma\rangle}$